ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

SUJET OPTION P'

Concours d'Admission 1974

Trois pages dactylographiées

MATHEMATIQUES I

1ère PARTIE

On donne une suite $a_1, a_2, \ldots$ *de réels positifs, des variables* $x_1, x_2, \ldots$. *On définit une suite de fractions rationnelles, par la première* $R_1 = x_1$, *et pour* $k \geqslant 1$, *par la relation de récurrence*

$$R_{k+1} = x_{k+1} + \frac{a_k}{R_k}$$

I.1. Ecrire R_2 *et* R_3 .

I.2. Montrer que si on connaît R_k *sous la forme* $\frac{P_k}{Q_k}$, *où* P_k *et* Q_k *sont des polynômes à* k *indéterminées n'ayant pas de facteur commun, on obtient* R_{k+1} *sous la forme* $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$, *où* P_{k+1} *et* Q_{k+1} *sont des polynômes à* $k+1$ *indéterminées n'ayant pas de facteur commun.*

I.3. Quels sont les degrés de P_k *et* Q_k *par rapport à l'ensemble de leurs indéterminées? Soient* α_k *et* β_k *les nombres des termes de* P_k *et* Q_k : *montrer qu'il existe des réels* ξ , η, λ, μ *tels que*

$$\alpha_k = \lambda \xi^k + \mu \eta^k$$

et donner les expressions de α_k *et* β_k , *en fonction de* k.

2ème PARTIE

Dans cette question tous les a_i *sont égaux à* $a > o$, *et toutes les indéterminées* x_k *prennent la même valeur positive* τ_o. *Il existe alors une fonction* f_a *telle que pour* $k \geqslant 1$ *la valeur* U_k *prise par* R_k *vérifie*

$$U_{k+1} = f_a\,(U_k)$$

II.1. Montrer que les différences $U_{k+1} - U_k$ *sont de signes différents suivant la parité de* k ; *et que tout intervalle fermé* $[\,U_k, U_{k+1}\,]$ *contient une valeur fixe* $\alpha > o$. *En utilisant (par exemple) la fonction* $f_a \circ f_a$ *montrer que les suites* $k \to U_{2k}$ *et* $k \to U_{2k+1}$ *sont monotones. En conclure que la suite* $p \to U_p$ *a une limite.*

II.2. On envisage une nouvelle suite $k \to V_k$ ainsi définie : on donne $b > a$ et on prend

$$V_2 = f_a(U_1) \; ; \; V_3 = f_b(V_2) \; ; \; \ldots ; \; V_{2k} = f_a(V_{2k-1}) \; ; \; V_{2k+1} = f_b(V_{2k})$$

Que peut on dire des suites $k \to V_{2k}$ et $k \to V_{2k+1}$? Comparer leurs limites éventuelles à la valeur α définie en II.1. Que peut on conclure pour la suite $k \to V_k$?

3ème PARTIE

Cette partie est indépendante de IV.

Dans cette partie les indéterminées $x_1, x_2, \ldots$ sont remplacées par une indéterminée unique x, et $(\forall k, a_k = 1)$. On suppose R_k, qui n'a plus qu'une variable, mise sous la forme irréductible $\dfrac{p_k(x)}{q_k(x)}$, p_k et q_k désignant des polynômes.

III.1. Montrer que, pour k convenablement choisi

$$(A) \quad p_{k+1} = xp_k + p_{k-1}$$

Etudier le degré et la parité de p_k.

III.2. Soit A_k^i le coefficient de x^{k-2i} dans p_k. Déduire de (A) la loi de formation du tableau $(\mathcal{C})$, à double entrée, où A_k^i figure à la $k^{ème}$ ligne et la $i^{ème}$ colonne $(i \geq o)$. Dresser $(\mathcal{C})$ pour $1 \leq k \leq 6$, et les valeurs utiles de i.

III.3. On envisage, sur les couples convenables d'entiers, la fonction $\Phi(l,m) = A_{l+m}^m$. Par quelle loi, déduite de III.2., peut on former le tableau $(\mathcal{C}')$ donnant $\Phi(l,m)$ à la $l^{ème}$ ligne et la $m^{ème}$ colonne ?

Quelles sont les expressions, écrites au moyen de factorielles, de $\Phi(l,m)$ et A_n^k ?

III.4. K désigne la matrice réelle $K = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & o \end{pmatrix}$. Montrer que les éléments de K^n $(n \geq 1)$ s'expriment à l'aide des polynômes p_k et q_k. En déduire que $(-1)^n \left(p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} \right)$ est une constante.

III.5. Montrer que la relation (A) permet de définir des polynômes p_k d'indices quelconques $(k \leq o)$; quels sont p_o ? p_{-1} ?

On définit le polynôme

$$\pi_k(x) = P_{-k}(-x) \; ; \text{ Trouver la relation liant trois polynômes } \pi_k \text{ d'indices consécutifs. Montrer que } K^{-n}, \; (n \in N, \text{ entier positif}), \text{ s'exprime à l'aide de polynômes } p \text{ ou } q \text{ d'indices bornés inférieurement.}$$

Quelles relations forme-t-on en écrivant le produit $K^{-n} K^n$?

SUJET OPTION P'

4ème PARTIE

On donne une suite $q_1, q_2, \ldots$ d'entiers positifs et on considère la suite $r_1 = q_1$; $r_2 = q_1 + \frac{1}{q_2}$; ... r_{k+1} se déduisant de r_k en y remplaçant q_k par $q_k + \frac{1}{q_{k+1}}$.

IV.1. Montrer que r_k s'exprime à l'aide de $q_1, \ldots q_k$ sous la forme

$$r_k = \frac{q_k U_k + U'_k}{q_k V_k + V'_k}$$, U_k , U'_k , V_k , V'_k étant des suites que l'on définira par des relations de récurrence.

Calculer $\Delta_k = U_{k+1} V_k - U_k V_{k+1}$; En déduire la nature de la série

$$v_k = r_{k+1} - r_k$$

IV.2. On donne $q_1, q_2, \ldots, q_p$, et on suppose la suite $k \to q_k$ de période p ; on se propose de former une équation du second degré admettant pour racine la limite α de la suite r_k

a/ Pour $p = 1$ (q_1 donné), puis pour $p = 2$ (q_1 et q_2 donnés) reconnaître des questions déjà étudiées.

b/ Pour p quelconque reconnaître l'existance d'une fonction g telle que $r_{k+p} = g(r_k)$ et en déduire l'équation demandée.

IV.3. On donne ici un réel $\alpha > 1$, et on cherche s'il existe une suite d'entiers q_k tels que $\lim_{k \to \infty} (r_k) = \alpha$; montrer que si cette suite existe, il existe pour $k > 1$, un réel δ_k , $0 < \delta_k < 1$, tel que

$$\alpha = \frac{(q_k + \delta_k) U_k + U_{k-1}}{(q_k + \delta_k) V_k + V_{k-1}}$$

Etablir la relation indépendante de α liant δ_{k+1}, δ_k, et q_{k+1} ; En déduire que, $q_1 \ldots q_k$ étant supposés connus, il est possible de fixer q_{k+1}.

Dans le cas où α est rationnel, $\alpha = \frac{N}{D} > 1$, montrer que les valeurs successives $q_1, q_2, \ldots q_k$ sont fournies par des divisions euclidiennes. Qu'en conclure ?

Exemple $\frac{N}{D} = \frac{43}{30}$.

IV.4. Les résultats établis en IV.1. et IV.3. (dans IV.3., on écartera le cas α rationnel), peuvent-ils subsister, en prenant pour $k \to q_k$ une suite réelle, positive, convenablement définie ?

FIN

oooOOOooo

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail